



**HAL**  
open science

# Principi di prova e principi di costruzione (scritto nel 1998)

Giuseppe Longo

► **To cite this version:**

| Giuseppe Longo. Principi di prova e principi di costruzione (scritto nel 1998). 2021. hal-03318724

**HAL Id: hal-03318724**

**<https://ens.hal.science/hal-03318724>**

Preprint submitted on 12 Aug 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

## **Principi di prova e principi di costruzione**

Riflettendo sul libro "Le ragioni della Logica", di Carlo Cellucci, Laterza, 1998

Giuseppe Longo

<http://www.dmi.ens.fr/users/longo>

CNRS et Dépt. de Mathématiques et Informatique

Ecole Normale Supérieure, Paris

Il libro di Carlo Cellucci è di notevole interesse, anzi direi che è un libro importante, perché costringe a riaprire un dibattito, che tanti considerano chiuso, proprio in un momento in cui l'analisi fondazionale in Matematica e nelle sue applicazioni (anzi, LA sua applicazione: l'Informatica) vive una crisi molto (grave ed) interessante. Oserei dire che il libro è sufficientemente importante, perché sia errato mettere solo in evidenza il suo maggior difetto, quello di buttare ... il bambino con l'acqua sporca.

Mi spiego. Cellucci fa una proposta originale, a cui confrontarsi, vissuta con passione e competenza storico-filosofica; egli non ripete le "solite cose" sulla logica, come macchinetta deduttiva. Come tanti in questi frangenti, demarca i confini della propria idea, anche esagerando i limiti o difetti dell'avversario. Nulla di tanto grave in questo: chi commenta i "Fondamenti dell'Aritmetica" dicendo soprattutto che Frege non ha capito nulla di Herbart, Riemann e di Stuart-Mill, che caricatura frettolosamente di "psicologismo" ed "empirismo", o chi critica Girard, dicendo che non conosce a fondo gli scritti di Hilbert o Tarski, sbaglia obiettivo, perché i contributi "costruttivi" di Frege o di Girard vanno ben al di là dei difetti della loro analisi della posizione altrui. Inoltre Cellucci, nella sua critica spesso "biased", è comunque ben più documentato.

Cominciamo dunque dall'errore veniale di analisi di Cellucci, per poter poi più liberamente parlar d'altro, dato che tale errore può fare comprensibilmente reagire alcuni logici matematici in modo troppo polemico. In breve, Cellucci getta il bambino della matematica sviluppatasi in questo secolo sotto il nome di "logica matematica" con la tanta acqua sporca rappresentata dalla filosofia che la ha maggioritariamente accompagnata. È vero che le applicazioni "fondazionali" della logica matematica alle diverse discipline matematiche sono comprensibilmente trascurate dalla maggioranza dei matematici, perché irrilevanti o "negative" (i risultati più importanti sono "limitativi" per i sistemi formali: "non si può dimostrare che ...", a partire dalla coerenza, all'assioma di scelta ed

all'ipotesi del continuo e via dicendo - si veda il progetto recente ed il lavoro notevolissimo di Harvey Friedman sull'indimostrabilita' in Aritmetica predicativa) o perche' ispirati dalla ricerca di certezze vecchie di una crisi superata da un secolo (e' vietato usare definizioni impredicative - come la misura di Lebesgue od i domini continui di Scott - e mangiare caviale fuori pasto ...); cio' non toglie che alcuni risultati siano rilevanti ed importanti "in se'", come quelli che hanno evidenziato principi di prova, quali l'Induzione Aritmetica (finita e transfinita) o l'Assioma di Scelta, o che correlano, ad esempio, logiche costruttive a topos geometrici (pro domo mea ...), strutture algebriche a risultati generali di Teoria dei Modelli. Ma, soprattutto, la logica matematica e' madre diretta di una delle discipline applicate più importanti del secolo e che sta cambiando la nostra vita: l'Informatica.

Ben sappiamo infatti come i calcolatori moderni, e persino alcuni dei principali metodi e linguaggi di programmazione (imperativi, logici, funzionali) siano nati dalla testa dei logici degli anni '30, grazie proprio al logicismo ed al formalismo (nonche' all'intuizionismo) cui facevano riferimento. (In questo, una citazione dello scrivente nell'introduzione del libro di Cellucci deforma il mio pensiero, perche' andava inserita nel contesto che ho appena detto e non in quello troppo distruttivo, almeno per l'Informatica, di Cellucci: sottolineavo il, giustificato, disinteresse dei matematici per le applicazioni matematiche della Logica Matematica, *intesa come fondazione*, ma, poi, ne spiegavo l'enorme rilievo per la nascita, prima, e poi come "strumento" dell'Informatica. Le altre citazioni di cui mi onora Cellucci sono invece inserite in contesti che condivido perfettamente). L'errore filosofico, con cui Cellucci se la prende e che perdura, e' il continuare ad affidare alla analisi della deduzione formale un ruolo fondazionale esclusivo, cercando cioe' di "fondare" la matematica *tutta* su una sua particolare branca, la logica matematica, appunto. A tal fine Cellucci cerca di "ripristinare", con una dovizia di riferimenti storici, un senso ampio della parola "logica", erroneamente ristretto, dopo Frege ed Hilbert, ai soli sviluppi logico-matematici, intesi come analisi matematica del metodo deduttivo-formale. Per non dire di quanti, ma la tesi e' ormai ridicola, han visto nel metodo deduttivo, in un universo chiuso di assiomi, addirittura un metodo di lavoro, una tecnica per la scoperta. Feferman, a nome del formalismo contemporaneo, ha preso più volte e fermamente le distanze da tale ultima tesi: la logica matematica deve solo fondare "a posteriori" la costruzione matematica, fornirne il quadro logico-formale, nulla puo' dire della "creazione libera e fantasiosa" del matematico. Ma c'e' ancora chi pensa ... come una macchina di Turing, manipolando stringhe finite di simboli, in base a 4 assiomi e 3 regole, in un sistema chiuso, e dice che tutti pensiamo così, che questo e' il modello di quella costruzione concettuale che si chiama matematica od addirittura della

cognizione umana.

Ho già ricordato il ruolo centrale avuto dalla Logica Matematica in Informatica, del resto a tutti ben noto, dalla nascita fino alla concezione di alcuni degli stili di programmazione più rilevanti, ruolo storico, che purtroppo sfugge a Cellucci. Tuttavia, questo ruolo, oggi, non è più così centrale come fino a pochi anni fa. I sistemi di calcolo interattivi, distribuiti, concorrenti, asincroni, ormai prevalenti nel mondo digitale, non sono macchine di Turing, né si programmano adeguatamente in linguaggi funzionali e loro varianti. In primo luogo, essi sono sistemi aperti, proprio nel senso che da' a questa espressione Cellucci: l'interazione, il manipolare stringhe o processi infiniti, può essere proprio analizzata nei termini in cui Cellucci propone di analizzare la matematica, sistema aperto di costruzioni concettuali, in cui significati contestuali e geometrici giocano un ruolo essenziale, ben al di là dei formalismi inerentemente sequenziali e indipendenti da semantica. A questo si aggiunge l'asincronia essenziale, di tipo fisico (persino relativistico), dei sistemi di elaborazione distribuiti e concorrenti, che pone problemi totalmente nuovi: se i logici matematici non stanno attenti, ed insistono sulle loro macchinette deduttive, derivate dal logicismo e dal formalismo, si lasciano sfuggire il maggior campo d'applicazione della Logica, l'Informatica (la "distribuzione" nello spazio e l'asincronia sono problemi di natura geometrico-dinamica, non solo logico-formale; la "reattività" tipica dei sistemi interattivi a poco a poco a che vedere con l'autismo proprio alle macchine di Turing od a(i termini de)l lambda-calcolo - autismo utilissimo per iniziare con rigore e semplicità a costruire macchine e programmi, ma ormai inadeguato, benché il lambda-calcolo ne sia uscito a livello metateorico, grazie alla ricchissima corrispondenza fra proposizioni, tipi ed oggetti di categorie). La visione filosofica di Cellucci mi sembra quindi rilevante anche per l'Informatica, ben al di là dei riferimenti che fa ad alcuni aspetti della programmazione logica: tali riferimenti non sembrano particolarmente significativi perché relativi ad aspetti minori dell'Informatica, propri ad un specifico stile di programmazione. Il problema, come dicevo, ha ben maggiori dimensioni e riguarda quel che oggi più conta: i sistemi in rete, distribuiti e concorrenti.

Passando all'obiettivo principale del libro, credo che esso possa essere riassunto come un tentativo di superare la distinzione fra, da una parte, una "logica della scoperta" e sua analisi cognitivo-storica e, dall'altra, "logica della giustificazione" e sua analisi soprattutto logico-metodologica (distinzione come quella che fa Feferman, appena ricordata). Questa distinzione, nel corso del secolo, è stato un elemento portante dell'analisi dei fondamenti della conoscenza scientifica, matematica in particolare, ed è stata ricchissima di conseguenze; fra queste l'edificazione del corpus stesso della logica matematica. Non a

caso si fa rimontare a Frege l'origine della logica matematica moderna, tutta centrata, da Frege appunto, sul rifiuto dello "psicologismo" e dell'"empirismo", come contrapposti alla sua ricerca, sulla scia di Leibniz e Boole, di "leggi universali del pensiero", perfettamente oggettive, in quanto indipendenti dal nostro riconoscerle tali e dal nostro stesso pensarle [Frege, 1897]. La "giustificazione" dunque di tali leggi non ha nulla a che vedere con la "dinamica" della loro costituzione: essa risiede nell'individuazione di "atomi e regole logici", assolutamente oggettivi ed universali. In quest'ottica, ad esempio, l'intuizione kantiana dello spazio e del tempo non possono in alcun modo essere presi a "giustificazione" delle nostre teorie matematiche, la geometria e l'aritmetica in primo luogo, come continueranno a proporre Poincaré e Brouwer: la soggettività di queste "esperienze sensibili", le incertezze di una storia possibile, di tipo empirico, non potrebbe giustificare l'oggettività della conoscenza logica, né la sua universalità ed ancor meno la sua indipendenza da diverse scelte "matematiche" possibili, come i "contro-intuitivi" assiomi non euclidei della geometria.

Liberato il campo dall'interferenza dei processi conoscitivi con la "purezza" ed "indipendenza" della matematica, Hilbert ha buon gioco, oltre e contro Frege, a distaccare il gioco formale dal significato ed a porre, in modo molto originale, il problema della coerenza formale degli assiomi, indipendentemente da ogni "senso", come centro del problema epistemologico. Il rapporto al mondo ed alla dinamica costitutiva del sapere scompare definitivamente, se non fosse per il finitismo del formalismo hilbertiano, per la ricerca cioè di certezza tramite l'intuizione del "finito". La matematica viene "isolata in un vuoto", per riprendere un'osservazione di H. Weyl.

Contro tutto questo si batte Cellucci: contro la distinzione fittizia fra "retroscena" e "proscenio", contro la "dieta unilaterale" (come osservo Wittgenstein), che dimenticando il rilievo autonomo della costruzione geometrica, ad esempio, vede solo nella logica alla Frege o nei formalismi (ma neppure in entrambi, bensì in uno solo di essi, a seconda se si è logicisti o formalisti) il "fondamento ultimo" della matematica. Cellucci rivitalizza a tal fine un dibattito che è antichissimo, rimonta al confronto fra Platone ed Aristotele, apprendo dal libro, e percorre tutta la storia: la ricchezza del metodo di Descartes e la sua battaglia contro le logichette medievali; la critica di Leibniz, contro lo "psicologismo" di Descartes; la svolta linguistica. E qui vorrei soffermarmi. Il processo storico che si individua a partire da Descartes, direi, è un progressivo restringimento della nozione di "razionalità" umana: esclusi intenzionalità ed affettività (Descartes), ci si concentra sul linguaggio (ricco di significati: Leibniz, Boole, Frege). Ed è Frege che vince definitivamente, per via del crollo del luogo tradizionale della certezza matematica: la geometria (euclidea). Quindi, come dicevo, con Hilbert (e poi Tarski), si organizza il

discorso matematico in tre livelli, metateorico, teorico, semantico: l'ipotesi di completezza del livello teorico-formale, indipendente dal significato, e' la spinta cruciale all'invenzione di macchine "puramente teoriche", symbol pushers formali, i calcolatori digitali, invenzione non da nulla.

Non e' la prima volta che in matematica congetture errate (il programma di Hilbert) suggeriscono lo sviluppo di splendide teorie; ad esempio, l'"analisi delle perturbazioni" dei moti planetari nel secolo scorso, era intesa confermare l'ipotesi di Laplace: i sistemi di equazioni differenziali sono "completi" rispetto il mondo. Una ipotesi di completezza del "formalismo" lagrangiano, quella di Laplace, o delle approssimazioni, si dira' poi, con serie di Fourier, rispetto al loro significato fisico. Essa servi' a sviluppare moltissima analisi matematica, fino, ma anche oltre, il relativo ... teorema di "incompletezza", il più importante della storia: la risposta al problema dei tre corpi data da Poincare' (l'impredittibilita' e' una forma di indecidibilita' o, meglio, lo spazio delle soluzioni elementari o approssimabili alla Lindstedt-Fourier e' "incompleto"). La storia si ripetera' con Hilbert e Goedel, al posto di Laplace e Poincare'.

Contro chi ancora oggi vive solo nell'ipotesi di completezza di questo o quel formalismo "chiuso", alla Laplace-Hilbert, si batte Cellucci, cercando di riproporre l'analisi della dinamica costitutiva del sapere matematico. Individua a tal fine il "metodo analitico", ricco di una varieta' di strumenti, in cui, ad esempio, quelli che io chiamerei "principi di costruzione geometrica" permettono, fondano in effetti, la prova, ben al di la' della logica, ma insieme alla logica. Ho imparato un bell'esempio da Cellucci: la prova di Euclide di duplicazione del quadrato (traccia le diagonali, fai le loro parallele per i vertici ... allora, per simmetria rispetto ai quattro triangoli raddoppiati, il quadrato e' ha una superficie doppia). La prova utilizza "principi di costruzione" geometrici (anche l'assioma delle parallele e' un principio di simmetria, una *costruzione* simmetrica) ed in essa la "logica" (alla Frege) e' modesta e di poco rilievo; la prova puo' quasi esser fatta in silenzio, disegnando sulla sabbia e mostrando i triangoli raddoppiati, per simmetria, come faceva il matematico greco (ed indiano). Non si tratta di "assiomi matematici" da aggiungere al "cuore logico" della matematica, ma di "principi geometrici" che lo spazio sensibile ci impone: la simmetria (e H. Weyl lo ha raccontato molto bene), la connessione (lo spazio come "varieta' connessa" di Riemann), la vicinanza, resa "concepibile" dal movimento (Poincare'). Questi concorrono alla prova, in effetti "sono a fondamento" della costruzione matematica, almeno quanto la "logica" ed il linguaggio. Cellucci vuole estendere ad essi l'uso del nome "Logica", come dicevo; personalmente, preferirei chiamarli "principi di costruzione (geometrica)" e ne sottolineerei il rilievo nel loro rendere

matematicamente intellegibile lo spazio sensibile, un aspetto dell'analisi "cognitiva" dei fondamenti della matematica, cui miro (si veda la mia pagina web per riferimenti). Gli stessi assiomi di Euclide sono basati su geodetiche e simmetrie che "sono dietro" la loro formulazione e su cui ora deve basarsi l'analisi fondazionale. Husserl lo dice molto bene in un testo splendido, *l'Origine della Geometria*, del 1936: «l'evidenza originaria non deve essere scambiata con l'evidenza degli assiomi; poiché questi assiomi sono principalmente i *risultati* d'una formazione di senso originaria ed hanno questa formazione stessa, sempre e digià *dietro* di loro». Questa formazione di senso, costitutiva del mondo fenomenale, è continuamente presente nella prassi della prova, come a mio avviso si affanna a dire Cellucci, ed è, per me, lo sguardo su questa "formazione di senso" a costituire l'analisi fondazionale che oggi si impone. Non "contro" la logica matematica, ma oltre essa e contro la sua filosofia: sono i grandi teoremi di incompletezza e di indipendenza dimostrati all'interno della logica matematica, nonché la Teoria della Dimostrazione che ne è seguita, che ci permettono oggi di discutere e di andare oltre. Non è poi così grave, ad esempio, se Feferman, Simpson e Sieg rivitalizzino nel 1988 (sul JSL) il programma di Laplace-Hilbert, con due secoli di ritardo, e Friedman il formalismo insiemista, se poi dimostrano splendidi risultati come la Forma Finita di Friedman del teorema di Kruskal o la versione recente del teorema di Auslander-Ellis, dovuta a Simpson ed altri. Il primo ci dice proprio come il concetto di infinito o la "struttura d'ordine" dei numeri interi, che invano il formalismo (ed anche il logicismo, suo modo) hanno cercato da espellere dai fondamenti, rientra massicciamente nella prova anche di asserti finitari (c'è addirittura bisogno del primo ordinale impredicativo); inoltre, nel risultato di Friedman, l'uso del raffronto sul piano di alberi, possibilmente infiniti, analisi non logica, ma geometrica, come lo è il buon ordine dei numeri, mette in evidenza che l'incompletezza dei formalismi sia dovuta ad una sorta di "gap" fra principi logico-formali e principi infinitari e/o di "costruzione geometrica". Il secondo teorema (Auslander-Ellis), sull'approccio geometrico ai sistemi dinamici, nella versione di Blass, Simpson et al., sembra confermare la mia ipotesi che la matematica dei sistemi dinamici "interattivi" sia essenzialmente impredicativa, anche se loro, con notevole profondità tecnica, riescono a darne un approccio assiomatico predicativo, semplicemente perché la circolarità o unità sistemica di sistemi dinamici è persa nell'approccio geometrico, dato nella sua generalità. Mi spiego: le trasformazioni dello spazio in sé, non catturano a priori, forme di circolarità o mutua dipendenza o dipendenza degli individui dal sistema, che le equazioni (differenziali) sanno esprimere. Lì è la sfida propria ai sistemi dinamici più significativi. L' "interazione gravitazionale" e la "risonanza", ad esempio, (a partire dal problema dei tre corpi di Poincaré: la posizione, velocità ed accelerazione di ogni corpo dipende da quella di tutti i corpi, mutuamente) può essere solo catturata, nel

linguaggio, in termini di "circolarita' matematica". Questa circolarita' matematica o "impredicativita'", se e' essenziale, come penso, filtra (ed e' eliminata con gran fatica dal talento di Simpson e coautori) persino nella debolezza dell'approccio geometrico, ma e' piu' chiara nell'approccio analitico ai sistemi dinamici, benché nessuno, che io sappia, ne abbia fatto l'analisi logica. Se e' vera, essa smantella totalmente ogni speranza di fondarli alla Hilbert: le definizioni impredicative (al secondo ordine) impediscono la tripartizione metateoria-teoria-semantica, poiché nella presentazione della sintassi non si può evitare la "convenzione semantica" del secondo ordine (uno dei motivi per cui i formalisti coerenti vogliono farne a meno). E, c'è qualcosa nel mondo che non sia un sistema dinamico? Basta avere il tempo e l'interazione fra oggetti o componenti del sistema.

Per soffermarsi sul formalismo insiemista un attimo, che, insieme ai formalismi per la deduzione, ha preteso l'esclusiva dell'analisi fondazionale, vorrei ricordare uno dei suoi più antichi risultati, uno straordinario insight di Cantor: in Teoria degli Insiemi si riesce a dimostrare che ... la retta e' "isomorfa" al piano. Follia da far raddrizzare i capelli: si distrugge così, "codificando" il piano con una retta, la nozione cartesiana di dimensione, come Cantor stesso intuì, in una lettera a Dedekind. La retta ed il piano, infatti, non hanno senso matematico senza la loro struttura metrico topologica, anzi di spazi vettoriali, dove l'"isomorfismo" e' assolutamente falso (la curva continua di Peano non e' bigettiva). Il gioco non e' da vietare, fa parte della fase o malattia infantile dell'analisi fondazionale, quella stessa che portera' ai paradossi, non certo della matematica, ma della logica ed insiemistica (e fara' dire a Poincare', cattivissimo: «la logistique n'est pas stérile: elle a engendré les paradoxes»). Ma Poincare' non si aspettava l'Informatica). In questo, la Teoria Quadro di De Giorgi ha già un sapore diverso: il matematico forza una struttura algebrica negli Assiomi di Libera Costruzione, trascurando fra l'altro i divieti logicisti e formalisti di circolarita', che anzi sono al centro dell'espressivita' della teoria. Le "operazioni" di De Giorgi strutturano la Teoria e la distinzione metateoria-teoria-semantica non ha senso in essa.

L'errore infatti e' di pensare ancora oggi di "fondare" tutta la matematica su proprieta' di "insiemi di punti" senza struttura ed "a meno di codifiche". In Teoria delle Categorie non si può neanche congetturare una assurda' come l'"isomorfismo" di Cantor, poiché la matematica vi e' trattata analizzando le sue strutture, come quella di retta o piano "reali". Vi si apprende, lavorandoci, che non esiste matematica senza strutture, ovvero, senza pluralita' di metodi di costruzione concettuale, la cui unita' sta nelle correlazioni matematiche date da funtori e trasformazioni (naturali). L'apporto dell'approccio insiemista e' stato enorme, ma il presentarlo in modo egemonico, come luogo unico o principio della fondazione della matematica (e della conoscenza, insieme alla



deduzione formale) e' un errore filosofico madornale. Prendendo come concetto di partenza, o luogo della certezza della costruzione matematica, i "punti" (nozione invece derivata in Teoria delle Categorie), si da' prioritaria a rappresentazioni matematiche o concettuali "indipendenti da codifica", e si dimentica che l'intelligenza dello spazio, per dire, ma anche di una qualsiasi costruzione matematica (o concettuale), e' *innanzitutto* (ma non solo, ovviamente) nelle codifiche o *strutture delle rappresentazioni*, spesso analogiche (v. i libri di Dehaene e Berthoz, in corso di traduzione in italiano - recensioni sulla mia pagina web). Insomma, la nostra "intelligenza del mondo" passa anche, forse in primo luogo, per la struttura (matematica) delle sue rappresentazioni: le codifiche di un pezzo di mondo con il nastro di una Macchina di Turing o con ... il cervello nel suo ambiente tridimensionale preferito, la scatola cranica di un essere vivente, sono radicalmente, *matematicamente*, diverse.

Tornando al libro di Cellucci, non so quanto esso riesca veramente a proporre un "nuovo metodo" scientifico, ambizione molto grande. A me ha insegnato l'ampiezza del dibattito, contro chi pretende che "la matematica e' stata sempre cosi': "assiomi, regole e deduzioni (formali)", sorta di caricatura, non solo della prassi, ma anche dei fondamenti, cara sia al logicismo sia al formalismo. Del resto ho imparato da De Giorgi che "... in matematica bisogna si' dimostrare teoremi, fa parte del mestiere, ma quel che piu' conta e' capire quali teoremi val la pena dimostrare". Andrei oltre: non solo la congettura e' cruciale (anche nel corso della prova: il congetturare il buon lemma da dimostrare), ma quel che conta e' la "costruzione concettuale". Come osserva Wittgenstein, la congettura non indica un fatto preesistente, bensì "illumina la strada"; la congettura non e' un asserto da "verificare" in un mondo che gia' c'e': essa e' piuttosto "(...) un riferimento indicatore per la ricerca matematica, una incitazione a costruzioni matematiche" [L. Wittgenstein, *Grammaires Philosophiques*, trad. Gallimard, 1980]. La congettura fa riferimento ad una costruzione concettuale ricca di significato, una struttura matematica intesa ed in fieri, permanentemente in fieri perche' infinitaria. Perche' questo e' il nodo: dire "non esiste matematica senza strutture" (frase su cui ho trovato il pieno assenso di Dana Scott e di tanti altri con contributi in Teoria delle Categorie) o trattarla come "conceptual mathematics" (vedi l'omonimo delizioso libricino di Bill Lawvere) vuol dire che non esiste, che *non si puo' fare matematica senza significati*. Quando Poincare' polemizza a distanza con Zermelo ed osserva che si potra' dire ben poco sull'Assioma di Scelta (o l'Ipotesi del Continuo) senza far riferimento al "significato" di "essere elemento di", ovvero a strutture soggiacenti, propone proprio la filosofia che dobbiamo derivare oggi dai risultati di Goedel e Cohen: per dire qualcosa su tali ipotesi bisogna fare costruzioni matematiche in cui si realizzano o no le ipotesi in questione; l'assiomatica

formale, nata proprio (Cantor-Frege e Zermelo) per rispondere a quelle domande, e' silente (che débacle del metodo formalista, della ipotesi filosofica e ... quanta bella matematica intorno al problema). Oppure Weyl, che in *Das Kontinuum* (1918) si batte contro la "banalizzazione" di una matematica meccanizzabile in linea di principio (p. 35 versione it.) e ... congettura l'incompletezza della Aritmetica ("lone wolf" come dira' di se stesso piu' tardi), vede sempre la matematica, come *intreccio di significati*, fondarsi su una pluralita' di "atti di esperienza", nel senso ampio di Husserl. Si osservi che Poincare' e Weyl chiamano "intuizione" quel che qui chiamo "riferimenti a significati strutturali"; strutture matematiche intese come costruzioni concettuali che attingono il loro significato «*in concreto through out human endeavors in our historical existence*» [Weyl, 1927], e che danno concretezza a costruzioni mentali: la loro analisi deve far parte del progetto fondazionale, in quanto progetto *epistemologico*, analisi di un "processo costitutivo della conoscenza".

Costruire, con gli "occhi della mente", nella memoria attiva di esseri viventi nel mondo, coni di rotazione e sezioni di cono, i razionali per risolvere equazioni, poi i numeri complessi, interpretarli sul piano (per giustificarli, con la geometria ovviamente), inventare limiti di tangenti e somme infinite, questa e' stata la prassi della Matematica: la giustificazione logica di tali costruzioni, il loro inserimento in nessi puramente formal-deduttivi, a posteriori, e' necessaria, perche' la coerenza e' necessaria in matematica, ma non e' sufficiente. Viva la logica matematica che ci ha dato strumenti splendidi per l'analisi necessaria e ... posto le basi, dati i teoremi di incompletezza, per capire che e' non e' sufficiente. Ora, dobbiamo ricomporre la frattura fra "logica della scoperta" e "logica della giustificazione". Analizziamo quindi i principi costitutivi di quella splendida costruzione concettuale che si chiama "Matematica", capendo che nella "scoperta" c'e' la "costruzione", non arbitraria, non mera convenzione, ma comune, intersoggettiva, e "fondata"; individuando "quel che c'e' dietro" le cosiddette "evidenza" ed "intuizione", cosi' facilmente spazzate sotto il tappeto dal logicismo e formalismo. A (ri-)cominciare dalle proprieta' di connessione, vicinanza e simmetrie che lo spazio fenomenale ci impone ed al cui "significato" Hilbert (la scuola formalista) ci ha vietato di pensare, spazzando via, grazie al rigore della proposta sua e di Frege, i tentativi informali, ma profondissimi, di Riemann, Helmutz, Mach, Poincare', Enriques, Weyl (si veda a riguardo il bel libro di storia di L. Boi "Le problème mathématique de l'espace", Springer-Verlag, 1995; nonche' quello di G. Chatelet "Les enjeux du mobile", Seuil, 1993, sulla "filosofia della geometria" soggiacente ai grandi risultati di fisica matematica, da Hamilton a Faraday). Queste proprieta' geometriche, che lo spazio sensibile ci impone, non hanno nulla a che fare con la logica, nel senso ristretto che le si e' dato in questo secolo, ne' con i formalismi linguistici;

tuttavia esse sono un'interfaccia cruciale fra noi ed il mondo, proprio quell'interfaccia, quel "velo fenomenale", per riprendere Husserl, su cui disegniamo tanta matematica. E la disegniamo come intreccio di metodologie, in cui ci sono di certo anche frammenti meramente formali, puri calcoli dei segni, o aspetti di pura logica, ma anche principi prevalentemente geometrici. La chiusura metodologica in uno solo di questi universi e' quel che Cellucci vuole aiutarci a superare, cercando nell'intreccio aperto ad una varieta' di apporti il senso nuovo di un'analisi fondazionale.

L'insegnamento per il "logico in Informatica" e' molto importante: come dicevo, per analizzare sistemi distribuiti, concorrenti, asincroni ed interattivi dobbiamo arricchire i nostri strumenti con geometria e dinamica, non possono bastare piccole varianti di linguaggi formali essenzialmente sequenziali. Ancora una volta, l'analisi dei fondamenti della matematica puo' essere di aiuto, purché si superino le ipotesi di completezza del puro livello "equazioni-calcoli quantitativi" e "logico-formale", ereditate da Laplace ed Hilbert, e la si arricchisca, quanto meno, con l'apporto diretto della costruzione geometrica, proprio come Poincaré arricchì la fisica matematica con la sua analisi "qualitativa", con la geometria dei comportamenti asintotici, del movimento in varieta' topologiche ... insomma con la geometria dei sistemi dinamici moderni. Ovvero, nel caso dell'analisi fondazionale, purché si faccia riferimento, con rigore, anche a nozioni quali l'ordine nello spazio, la connessione, la vicinanza, la simmetria ... che fondano la matematica almeno quanto la logica. Va detto che la Logica Lineare di Girard ci sta insegnando moltissimo in tal senso. Come nella Teoria di De Giorgi, l'ipotesi chiave della Teoria formalista della Dimostrazione, la distinzione fra metateoria-teoria-smantica vi perde senso; inoltre, la geometria vi rientra per la finestra della "struttura delle prove", le proof-nets: regole date solo "per ragioni di simmetria", proprietà di connessione nelle prove che determinano le conseguenze, secondo la struttura di nodi - una nozione tridimensionale .... In fondo, i fisici ci hanno già aperto la strada, quando in questo secolo hanno aggiunto, alla nozione di "legge fisica", mere "proprietà di simmetria", per spiegare i fenomeni.

Siamo solo all'inizio di uno splendido allargamento del dibattito fondazionale (e della logica matematica), che, superato lo shock ormai molto antico delle geometrie non-eucildee, riponga anche, ma non solo (non propongo diete unilaterali), il problema del rapporto fra la nostra proposta geometrica e lo spazio fenomenale, ricordando che «la geometria ... e' generata nel nostro spazio di umanità, a cominciare da una attività umana» [E. Husserl, 1936; citato]. Ruolo non minore possono avere nel dibattito i problemi e le esigenze dell'Informatica di oggi. E non solo quelli che ho citato: nel laboratorio Sony a due passi dall'ENS fanno dei robot, in parte virtuali, che costruiscono

categorizzazioni del mondo, un linguaggio in effetti, a partire dal movimento e dall'azione, sorta di rovesciamento radicale del paradigma, se non mi abuso, Frege-Hilbert-Chomsky, e che somiglia non poco alla vicenda evolutiva dell'animale umano. Ma loro, giustamente, non dicono che stanno simulando l'uomo, bensì che stanno facendo macchine che parlano "macchinese". Poterli aiutare con una matematica che non solo tratti, ma *si fondi* anche sul nostro rapporto al mondo, allo spazio sensibile, sarebbe molto bello (ed utile).

Nota: Un programma di ricerca che sviluppa i pochi cenni qui fatti, lo si può trovare nel "Progetto per un Gruppo di Lavoro" in

<http://www.dmi.ens.fr/users/longo/geocogni.html>

proposto da J. Petitot (Filosofia della Scienza, EHESS), B. Teissier (Geometria Differenziale, CNRS ed ENS) e lo scrivente.

(La stessa pagina contiene una breve bibliografia)